

Série fonctions trigonométriques

Mr Masmoudi Radhouane

Exercice 1 :

Calculer les limites éventuelles suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan 3x)^2}{1 - \cos x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x - x}{\sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos 2x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \tan^2 x$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - \cos x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \cos 4x}$$

Exercice 2 :

Soit $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 x$ et $g(x) = 2 \cos x - 2 \cos^3 x$.

- 1) Montrer que f et g sont dérivables sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
- 2) Calculer $g(\pi - x)$. Que peut-on conclure.
- 3) Montrer qu'on peut étudier g sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$.
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) + g(x) - 1}{\pi - 3x}$.

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par : $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$, si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- 2) Etudier la parité de f .
- 3) Montrer que f est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x$ et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 2 cm).

1) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$ puis montrer qu'on peut étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Etudier f et représenter la partie de \mathcal{C}_0 de \mathcal{C} sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{2 \cos^3 x}{1 + \sin x}, \text{ si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

b) Etudier la dérivabilité de g .

c) Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $g(x) = -f(x)$ puis construire \mathcal{C}_g .

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ et on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que le point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de \mathcal{C} .

2) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et que :

$$f'(x) = \frac{\sin x(1 + 2 \cos^2 x)}{\cos^2(2x)}.$$

3) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cap D_f$.

4) Etudier f et tracer la partie de \mathcal{C} dans $[-\pi, \pi]$.

5) Déterminer les équations des tangentes à \mathcal{C} aux points d'ordonnées 1.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x$.

1) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

- 2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la droite $\Delta_k : x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ est un axe de symétrie de \mathcal{C}_f
puis montrer qu'il suffit d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.
- 3) Etudier f et tracer la partie de \mathcal{C}_f dans $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
- 4) Soit $g(x) = \frac{f(x) - 1}{\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x}$, $x \in \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$. Préciser D_g puis étudier g et tracer sa courbe \mathcal{C}_g dans un nouveau repère orthonormé.